4/a- $\forall n \in IN; v_{n+2} = \int_0^1 x^{\frac{n+2}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$

$$\left(\begin{array}{lll} v(x) = x^{\frac{n}{2}+1} & \leftrightharpoons & v'(x) = \frac{n+2}{2}x^{\frac{n}{2}} \\ u'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} & \leftrightharpoons & u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}+1} \end{array}\right)$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{n}{2}+1}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\frac{n+2}{2}\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}+1}dx$$

$$= 0 + \frac{n+2}{3}\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)dx$$

$$= \frac{n+2}{3}\int_0^1\left[x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{n}{2}+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$= \frac{n+2}{3}\left[\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\frac{n}{2}+1}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx\right]$$

$$v_{n+2} = \frac{n+2}{3}[v_n - v_{n+2}]$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{n+2}{3}\right)v_{n+2} = \frac{n+2}{3}v_n \Leftrightarrow \underline{v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n.}$$

b- • $\forall n \in IN; v_{n+1} \leq v_n$ (car (v_n) est décroissante sur IN^*)

$\Leftrightarrow \forall n \in IN; \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1.$

$\star$ $\forall n \in IN; \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \times \frac{v_{n+2}}{v_n} = \frac{n+2}{n+5} \times \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}}$

Or $\frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \geq 1$ car (v_n) est décroissante sur IN

$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+5} \times \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} \geq \frac{n+2}{n+5} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \frac{n+2}{n+5}.$

En conclusion $\forall n \in IN; \frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$

Et comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$ alors d'après un théorème de limite et ordre on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1.$

5/a) $\otimes$ $v_0.v_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{12}$ et $\frac{2\pi}{(0+2)(0+3)(0+4)} = \frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow v_0.v_1 = \frac{2\pi}{(0+2)(0+3)(0+4)}$

donc la proposition est vraie pour n=0.

$\oplus$ Soit $p \in IN$. Supposons que $v_p.v_{p+1} = \frac{2\pi}{(p+2)(p+3)(p+4)}$

montrons que $v_{p+1}v_{p+2} = \frac{2\pi}{(p+3)(p+4)(p+5)}.$

$$v_{p+1}v_{p+2} = v_{p+1}.v_p.\frac{v_{p+2}}{v_p} = \frac{2\pi}{(p+2)(p+3)(p+4)}.\frac{p+2}{p+5}$$

$$= \frac{2\pi}{(p+3)(p+4)(p+5)}$$